



**DECSAI**

**Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.**

Universidad de Granada



# Medición de funciones de pertenencia

© Fernando Berzal, [berzal@acm.org](mailto:berzal@acm.org)

## Medición de Funciones de pertenencia



- Motivación
- Interpretaciones de la función de pertenencia
- Métodos de elicitación de la función de pertenencia



# Motivación



Trabajar con conjuntos difusos requiere:

- Especificar el dominio  $X$ , el universo de los objetos bajo consideración, ya sea un conjunto finito fácil de enumerar (p.ej. países del mundo o empresas que cotizan en bolsa), un conjunto finito difícil de enumerar en la práctica (p.ej. personas) o un conjunto infinito.
- Asignar grados de pertenencia a los objetos en los subconjuntos difusos definidos en  $X$ .



# Motivación



**¿Qué representa un grado de pertenencia?**

- La función de pertenencia caracteriza totalmente a un conjunto difuso, por lo que es necesario establecer su semántica y diseñar métodos prácticos para su obtención.
- **Principales dificultades del uso de conjuntos difusos:** el significado de las propiedades que representan y la medición de las funciones de pertenencia.





No hay consenso sobre el significado de las funciones de pertenencia:

La apreciación de la vaguedad es una cuestión muy personal.



## Interpretaciones de la función de pertenencia



Modelos teóricos para la interpretación de la función de pertenencia:

- Interpretación formalista
- Interpretación probabilística
- Teoría de la decisión
- Teoría axiomática de la medida



# Interpretaciones de la función de pertenencia



## Interpretación formalista

- Los valores de pertenencia se asignan por medio de una función construida al efecto a partir de razonamientos abstractos.
- Dicha función suele construirse a partir de la distancia a uno o más prototipos que pueden venir dados por una persona o por consenso entre varias.



# Interpretaciones de la función de pertenencia



## Interpretación formalista

EJEMPLO:

Un hombre es calificable como alto a partir de 1.70 y obviamente lo es por encima de 1.90.

Podemos entonces admitir

$$\begin{array}{ll} M(e) = 0 & \text{si } e < 1.70 \\ f(e) & \text{si } 1.70 \leq e \leq 1.90 \\ 1 & \text{si } e > 1.90 \end{array}$$

f creciente con  $f(1.70)=0$ ,  $f(1.90)=1$ .

“Juan es alto con grado 0.7”  $\equiv M(\text{estatura}_{\text{Juan}}) = 0.7$ .



# Interpretaciones de la función de pertenencia



## Interpretación probabilística

- La función de pertenencia se considera como una medida de regularidad en una cierta población que puede obtenerse mediante "encuestas" o "muestreos".



# Interpretaciones de la función de pertenencia



## Interpretación probabilística

### EJEMPLO

La afirmación "Juan es alto con grado 0.7" puede verse de dos maneras distintas:

- El 70% de una cierta población de encuestados califica a Juan como "alto".
- El 70% de una cierta población de encuestados describe el calificativo "alto" mediante un intervalo que contiene la estatura de Juan.





# Interpretaciones de la función de pertenencia



## Desde el punto de vista de la teoría de la decisión

- El grado de pertenencia de  $x$  a  $A$  se asocia con una "recompensa" o "utilidad" que se recibe al establecer "x pertenece a A".
- Dicha "utilidad" está relacionada con el grado de verdad de dicha proposición, es decir con su credibilidad.



# Interpretaciones de la función de pertenencia



## Desde el punto de vista de la teoría de la decisión

### EJEMPLO

La afirmación "Juan es alto con grado 0.7" significa que se recibe una utilidad de 0.7 al decir que "Juan es alto", utilidad que será nuestra credibilidad al establecer el calificativo "alto" para Juan.



# Interpretaciones de la función de pertenencia



## Desde la perspectiva de la teoría axiomática de la medida

- El grado de pertenencia es una medida (en sentido axiomático formal) de una propiedad de un cierto objeto.



# Interpretaciones de la función de pertenencia



## Desde la perspectiva de la teoría axiomática de la medida

### EJEMPLO

La proposición "Juan es alto con grado 0.7" significa que

- Cuando comparamos a Juan con otros, resulta ser más alto que alguno de ellos (escala ordinal)
- Este hecho puede codificarse numéricamente con 0.7 en alguna escala.





La construcción de las funciones de pertenencia que capturan de forma adecuada el significado de los términos lingüísticos en una aplicación particular (así como el significado de las operaciones asociadas sobre términos lingüísticos) es un problema típico de **adquisición de conocimiento**.



## ESCENARIO HABITUAL

- Se elicitaba el conocimiento experto sobre un tema en forma de proposiciones expresadas en lenguaje natural.

p.ej. "Si la temperatura es muy alta..."

- Se trata de determinar el significado preciso de cada término lingüístico empleado en esas proposiciones.

p.ej. El concepto de "temperatura muy alta" tiene significados muy diferentes aplicado a pacientes o a reactores nucleares.





# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



Las distintas técnicas para construir funciones de pertenencia se pueden clasificar, a grandes rasgos, en...

## ■ **Métodos directos**

Los expertos responden preguntas que corresponden de forma explícita a las funciones de pertenencia.

## ■ **Métodos indirectos**

Los expertos responden preguntas más fáciles de responder que, indirectamente, permiten construir las funciones de pertenencia (con el objetivo de ser menos sensibles a distintos sesgos subjetivos).



# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## **Métodos directos**

Viables para cualquier concepto que satisfaga dos condiciones:

- El concepto se puede representar perfectamente con ejemplos concretos (prototipos ideales).
- La compatibilidad de otros elementos con esos prototipos ideales se puede expresar matemáticamente con una función de similitud.



# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Métodos indirectos

Los métodos directos tienen el inconveniente de requerir respuestas demasiado precisas para capturar juicios que no dejan de ser subjetivos.

Esas respuestas son, en cierta medida, arbitrarias.

Los métodos indirectos  
tratan de reducir esa arbitrariedad...

p.ej. Comparación de pares



# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



Existen múltiples métodos para construir la función de pertenencia (que, obviamente, están relacionados con la forma en que se interpreta la misma):

- Construcción formalista a partir de prototipos
- Ejemplificación de la función de pertenencia
- Sondeo o encuesta
- Calificación directa
- Calificación inversa
- Estimación por intervalos
- Comparación de pares
- Clustering difuso



# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Construcción formalista a partir de prototipos

- Los valores de pertenencia se asignan por medio de una función construida al efecto a partir de razonamientos abstractos.
- En muchos casos, dicha función se construye a partir de la distancia a uno o varios prototipos.
- Los prototipos los selecciona una sola persona o se eligen por consenso entre varias.



# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Ejemplificación de la función de pertenencia

- Se hacen preguntas directas a personas más o menos expertas acerca del valor de pertenencia y a partir de ahí se estima la función de pertenencia.
- ¿Cuál es el grado de  $O$  en  $F$ ?  $\Rightarrow$  Pares  $\langle x, F(x) \rangle$

### EJEMPLOS

¿Cuál es el grado de pertenencia de Juan al conjunto de los "hombres altos"?

¿Cuál es el grado de pertenencia del color  $C$  al conjunto de los "colores oscuros"?



# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Sondeo o encuesta

- Se basa en las respuestas de un grupo de N expertos.
- La pregunta tiene el formato siguiente: "¿puede O ser considerado compatible con el concepto A?".
- Sólo se acepta un "SÍ" o un "NO", de forma que:  
$$A(O) = (\text{Respuestas Afirmativas}) / N$$

### EJEMPLOS

¿Pertenece Juan al conjunto de los hombres altos?

¿Pertenece el color C al conjunto de los colores oscuros?



22

# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Calificación directa

- Se muestran a una o varias personas ejemplos de un concepto y se pide que los califiquen con un grado.
- A partir de estas calificaciones se estima la función de pertenencia.

EJEMPLO: Para la estatura, un encuestador muestra a una persona diferentes individuos de distintas estaturas (sin que dicha persona conozca su valor real) y se le pide que califique con un grado su pertenencia a los conjuntos bajo, alto...



23

# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Calificación inversa

- Se les pide a una o varias personas que identifiquen objetos que cumplan un concepto con grado  $\alpha$  para distintos valores de  $\alpha$ .
- A partir de la muestra obtenida se estima la función de pertenencia.

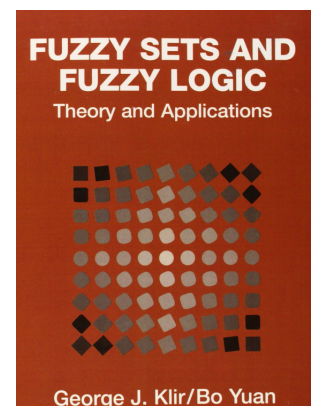
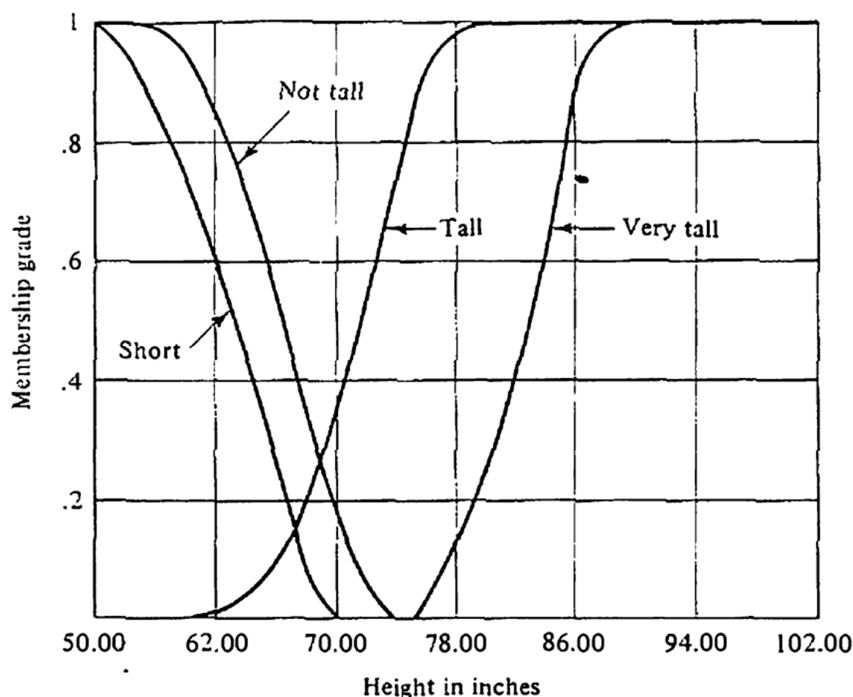
EJEMPLO: Para la estatura, un encuestador un pide a una persona que identifique diferentes individuos que puedan ser calificados como "alto" con un cierto grado (sin que dicha persona conozca su estatura real).



# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Calificación directa & calificación inversa





# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Estimación por intervalos

- Método orientado a la medición de funciones de pertenencia sobre dominios numéricos.
- Sea "C" un concepto referido a una variable "V" con dominio en  $\mathbb{R}$ . Se hace una encuesta preguntando en qué intervalo debe estar V para ser considerado que cumple C.
- A partir de la encuesta se estima la función de pertenencia del siguiente modo:  
C(x) será el porcentaje de encuestados que establecieron para C un intervalo que contenía a x.



# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Estimación por intervalos

### EJEMPLO

$$\text{alto}(1.75) = 0.6$$

si el 60% de los encuestados establecieron para "alto" un intervalo que contenía el valor 1.75.

**NOTA:** También se puede ponderar en función de la competencia de cada experto consultado.





# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Comparación de pares

- Método que mejor se ajusta a las interpretaciones axiomáticas de la Teoría de la Medida.
- Para un cierto concepto  $C$  se presenta a una o varias persona un conjunto de objetos  $\{x_i, i=1,2,\dots,N\}$  y se les pide que compare pares de objetos en términos del cumplimiento de  $C$  y estime además los grados relativos de diferencia de cumplimiento.
- A partir de la matriz que se genera de este modo se estima la función de pertenencia del concepto  $C$ .



# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Comparación de pares

- La comparación de pares de  $N$  objetos da lugar a una matriz cuadrada  $P=[p_{ij}]$
- Nuestro objetivo es determinar el grado  $c_i=C(x_i)$  de pertenencia de los objetos  $x_i$  al conjunto  $C$ .
- Supongamos que somos capaces de obtener valores perfectos para  $p_{ij}$ . Entonces  $p_{ij}=c_i/c_j$  y la matriz es consistente ( $p_{ij}=p_{ik}p_{kj}$ ). En ese caso,  $c_j = 1 / \sum_i p_{ij}$
- En la práctica, la matriz no será consistente, pero hay métodos numéricos que nos permiten estimar los valores  $c_j$  (y la precisión de la estimación).



# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Clustering difuso

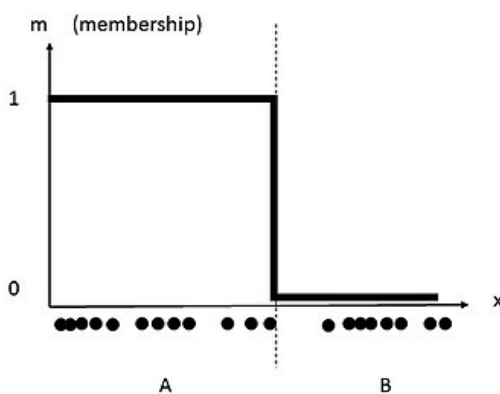
- Método orientado a variables con dominio numérico.
- Se toma un conjunto de objetos y sobre él se mide el valor de una variable de interés.
- Sea  $V = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$  el conjunto de medidas.
- Aplicando una técnica de clustering como el **fuzzy C-means** sobre  $V$ , podemos agrupar las medidas en  $C$  clases, cada una de las cuales identifica una propiedad difusa relativa a la variable.



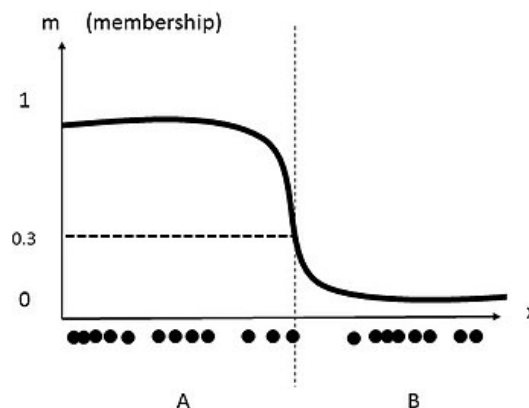
# Métodos de elicitación de la función de pertenencia



## Clustering difuso



Clustering clásico



Clustering difuso





Miguel Delgado:

## Apuntes de Inteligencia Computacional

Universidad de Granada, hasta el curso 2021/2022



Sesiones grabadas en vídeo, curso 2020/2021:

<https://elvex.ugr.es/decsai/computational-intelligence/video/fuzzy/>



# Bibliografía recomendada

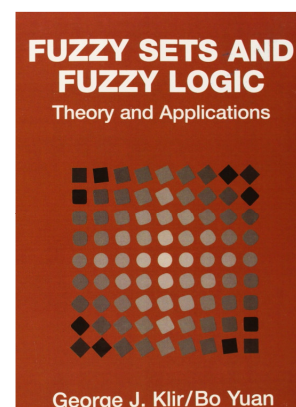


## Lógica Difusa

- Hans-Jürgen Zimmermann:  
**Fuzzy Set Theory**,  
WIREs Computational Statistics,  
John Wiley & Sons, 2:3, May/June 2010.  
DOI 10.1002/wics.82



- George J. Klir & Bo Yuan:  
**Fuzzy Sets and Fuzzy Logic:  
Theory and Applications**,  
1<sup>st</sup> edition, Prentice Hall, 1995.  
ISBN 0131011715

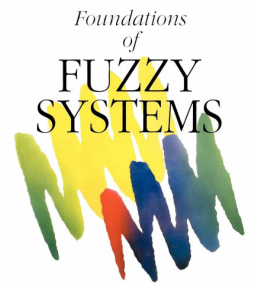


# Bibliografía complementaria



## Lógica y Sistemas Difusos

- Rudolf Kruse, Joan E. Gebhardt & Frank Klawonn:  
**Foundations of Fuzzy Systems.**  
John Wiley & Sons, 1994. ISBN 047194243X.
- Witold Pedrycz & Fernando Gomide:  
**An introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design.**  
MIT Press, 1998. ISBN 0262161710.
- Hans-Jürgen Zimmermann:  
**Fuzzy Set Theory and Its Applications,**  
Springer, 3<sup>rd</sup> edition, 1996. ISBN 0792396243  
Springer, 4<sup>th</sup> edition, 2001. ISBN 9401038708.
- F. Martin McNeill & Ellen Thro:  
**Fuzzy Logic: A Practical Approach.**  
Morgan Kaufmann, 1994. ISBN 0124859658.



R. Kruse • J. Gebhardt • F. Klawonn

**FUZZY LOGIC**  
A PRACTICAL APPROACH  
F. MARTIN MCNEILL • ELLEN THRO  
Foreword by Ronald R. Yager

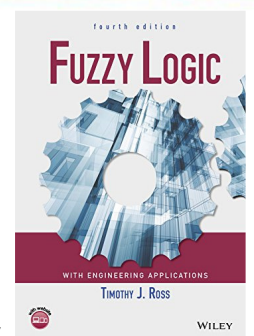


# Bibliografía complementaria



## Lógica y Sistemas Difusos

- Timothy J. Ross:  
**Fuzzy Logic with Engineering Applications,**  
4th edition, John Wiley & Sons, 2017. ISBN 1119235863.
- Lofti A. Zadeh: **Fuzzy Sets.**  
Information and Control, volume 8, issue 3, pp. 338-353,  
June 1965. DOI 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
- James C. Bezdek: **Pattern Recognition with Fuzzy Objective  
Function Algorithms.** Plenum Press, 1981. ISBN 0306406713.
- Bart Kosko: **Neural Networks and Fuzzy Systems: A  
Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence.**  
Prentice Hall, 1992. ISBN 0136114350
- Mohammad Jamshidi, Nader Vadiie & Timothy Ross (editors):  
**Fuzzy Logic and Control. Software and Hardware  
Applications.** Prentice Hall, 1993. ISBN 0133342514.



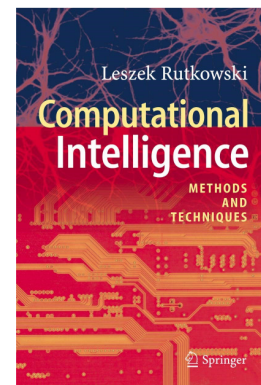
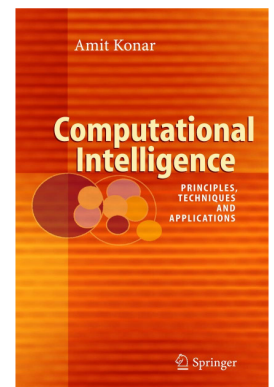
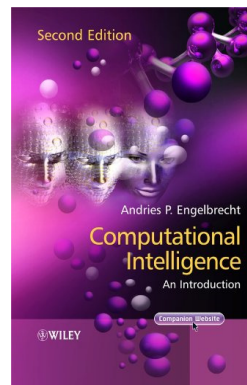


# Bibliografía complementaria



## Inteligencia Computacional

- Andries P. Engelbrecht:  
**Computational Intelligence. An Introduction**,  
2<sup>nd</sup> edition, John Wiley, 2007.  
ISBN 0470035617.
- Amit Konar:  
**Computational Intelligence. Principles, Techniques and Applications**,  
Springer Verlag, 2005.  
ISBN 3540208984.
- Leszek Rutkowski:  
**Computational Intelligence. Methods and Techniques**,  
Springer Verlag, 2008.  
ISBN 3540762876.



# Bibliografía complementaria



## Inteligencia Computacional

- James M. Keller, Derong Liu & David B. Fogel:  
**Fundamentals of Computational Intelligence: Neural Networks, Fuzzy Systems, and Evolutionary Computation**,  
Wiley - IEEE Press, 2016. ISBN 1119214343
- Rudolf Kruse, Christian Borgelt, Christian Braune, Sanaz Mostaghim, Matthias Steinbrecher, Frank Klawonn & Christian Moewes: **Computational Intelligence: A Methodological Introduction**. Springer, 2<sup>nd</sup> edition, 2016. ISBN 1447172949

